TEXTO DE APOYO DE MATEMÁTICAS

Para más información: (502) 6665-1345 EXT: 212

ÍNDICE

CONJUNTOS NUMÉRICOS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS 4
1. DESARROLLO DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN 4
2. CLASIFICACIÓN DEL CONJUNTO DE NÚMEROS 5
2.1. NÚMEROS NATURALES (N) 5
2.1.1. RECTA NUMÉRICA 5
2.1.2. ORDEN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES 6
2.1.3. OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES 6
2.2. NÚMEROS ENTEROS (Z) 8
2.2.1. RECTA NUMÉRICA 9
2.2.2. NÚMEROS OPUESTOS 9
2.2.3. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO 9
2.2.4. ORDEN DE LOS NÚMEROS ENTEROS 9
2.2.5. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS 10
2.2.6. JERARQUÍA OPERATIVA: 12
2.3. NÚMEROS RACIONALES (Q) 14
2.3.1. RECTA NUMÉRICA 14
2.3.2. ELEMENTOS DE UNA FRACCIÓN 15
2.3.3. TIPOS DE FRACCIONES 15
2.3.4. NÚMERO MIXTO 15
2.3.5. NÚMEROS RACIONALES DECIMALES 16
2.3.6. FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS 19
2.3.7. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES 22
2.3.8. OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES 22
2.3.9. APLICACIONES DE FRACCIONES, MCD Y MCM 29
HOJA DE TRABAJO 31
EVALUACIONES 37
1. Evaluación 1 37
2. Evaluación 2 40
3. Evaluación 3 41

PRESENTACIÓN

Esta guía tiene la finalidad de servir como un apoyo en la preparación académica de los aspirantes que se someten al examen de admisión de la ENCA en el área de matemática. Su contenido se centra en los principales temas que serán evaluados en el examen de preselección, aportando algunos conceptos, esquemas y ejemplos, más no se profundiza completamente en éstos, tal como sería el objetivo de un libro. Por esta razón se aconseja que el futuro alumno complemente sus conocimientos con otras fuentes de información. Además, también es aconsejable el apoyo de un tutor, quien puede guiarse con su contenido y utilizar los ejercicios propuestos para aclarar las dudas del tutorado.

Por otra parte, esta guía constituye un documento en proceso continuo de mejoramiento, por lo que cualquier aporte para mejorarla será bienvenido.

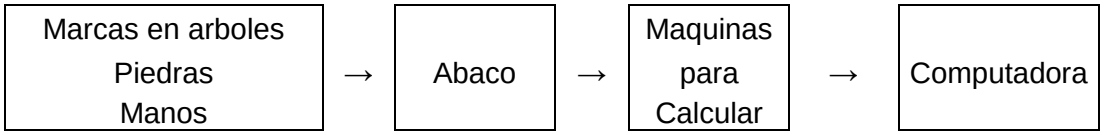
CONJUNTOS NUMÉRICOS Y OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS

1. DESARROLLO DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Un sistema de numeración es un conjunto de números y reglas que sirven para determinar todos los números válidos dentro del mismo sistema. Existen muchos sistemas de numeración, los cuales tienen sus propios signos, relaciones, convenios y normas. Su desarrollo se ha dado acorde al desarrollo cognitivo del ser humano en cada civilización y puede ser:

a. Por los instrumentos que ha utilizado el hombre para contar

Durante su desarrollo, el ser humano ha creado instrumentos que le han permitido contar y descubrir las relaciones entre los números según sus sistemas de numeración. En la era primitiva se utilizaron los elementos naturales disponibles como piedras para realizar marcas en los árboles, o bien algunas pinturas para marcar las paredes de las cavernas. Poco a poco se fue evolucionando y se creó el ábaco, un instrumento muy utilizado en la antigua Mesopotamia y en Mesoamérica para realizar operaciones aritméticas sencillas.



Posteriormente se fueron desarrollando máquinas que utilizaban engranajes para desarrollar cálculos más complejos. Un ejemplo de la antigüedad es el mecanismo de Anticitera, que es considerada “una computadora mecánica”, muy adelantada para su tiempo. Después, el ser humano desarrolló calculadoras mecánicas, digitales y la computadora. ¿Qué se desarrollará después?

b. Por los sistemas de numeración que han creado las civilizaciones

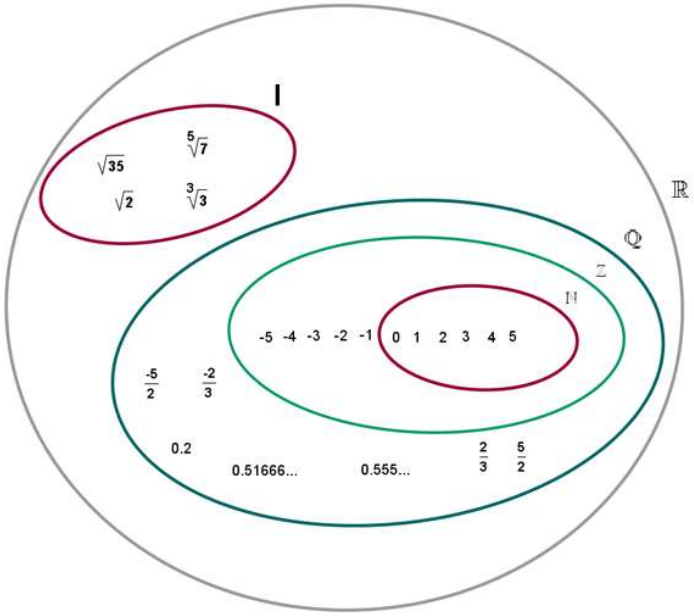
Cada civilización ha tenido su propio desarrollo cognitivo, es decir, ha desarrollado sus propios conocimientos de acuerdo al lugar y a los elementos naturales con los que se ha relacionado. De esta manera, cada civilización ha desarrollado su propio sistema de numeración con sus propias reglas. Entre éstos se ha de destacar el sistema Maya, civilización que consideró al “cero” como un número. Hoy en día, en un mundo más globalizado, el sistema que más se utiliza es el decimal, que para representar a los números utiliza 10 símbolos y entre ellos toma en cuenta al cero.

BABILONICO	EGIPCIO	MAYA	BINARIO	HEXADECIMAL	DECIMAL
5,000 a.C.	3,000 a.C.	300 a.C.	300-1,900 d. de C	400 d. de C	800 d. C
Posicional	No Posicional	Posicional	Posicional	Posicional	Posicional
Base 60	Base 10	Base 20	Base 2	Base 16	Base 10
3 símbolos	7 símbolos	3 símbolos	2 símbolos	16 símbolos	Símbolos 10
Sin cero	Sin Cero	Con cero	Con cero	Con cero	Con cero

2. CLASIFICACIÓN DEL CONJUNTO DE NÚMEROS

Los números se pueden clasificar. El conjunto que los contiene a todos es el conjunto de los números complejos, el cual tiene dos subconjuntos: 1) Números reales (R) y 2) Números imaginarios (i).

El que nos interesa para esta guía es el conjunto de los números reales, que contiene a los números Irracionales (I) y los números Racionales (Q). Estos últimos se pueden clasificar en números Enteros (Z) y números Naturales (N).



Fuente: recuperado de https://bit.ly/2B5yIB0

A continuación se detalla cada uno de estos conjuntos con sus propiedades más importantes:

2.1. NÚMEROS NATURALES (N)

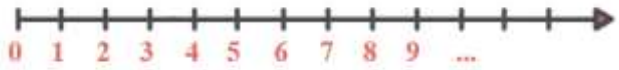
Son los números que se usan para contar. Por ejemplo, cuando se cuentan 5 manzanas, 20 patos, 3 cerdos, etc. Estos números se cuentan de unidad en unidad, es decir, no hay fracciones ni decimales. Se puede representar simbólicamente como:

N = { 0, 1, 2, 3 , 4, 5, 6, 7,…….}

En nuestro caso incluiremos al cero como un número natural.

2.1.1. RECTA NUMÉRICA

La recta numérica es un gráfico. Se dibuja una línea y se colocan los números separados por distancias iguales. La recta numérica de los números naturales es la siguiente:



Fuente: recuperado de https://bit.ly/2YM1Dsy

2.1.2. ORDEN EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Al comparar dos números naturales a y b entre ellos se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

- ✓ **a > b** (a es mayor que b), si al representarlos gráficamente en la recta numérica, **a** se encuentra a la derecha de **b**.
- ✓ **a < b** (a es menor que b), si al representarlos gráficamente sobre la recta numérica, **a** se encuentra ubicado a la izquierda de **b**.
- ✓ **a = b** (a es igual a b), si al representarlos en la recta numérica, a **a** y a **b** les corresponde el mismo punto.

¿Qué número es menor, 4 o 1?

1 es menor que 4 porque está a la izquierda que el 4

Fuente: recuperado de https://bit.ly/2KITRpl

2.1.3. OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

A. ADICIÓN

a + b = c donde a, b y c representan a cualquier número natural.
a y b son los sumandos y c es la suma o total.

Propiedades de la adición:

a. **Clausurativa (Cerradura):** La suma de dos naturales es siempre otro número natural.

a + b = c

Ejemplo 3 + 5 = 8

b. **Conmutativa:** El orden en el que se realiza la suma de dos números naturales no altera el resultado. El orden de los sumandos no altera la suma.

a + b = b + a

Ejemplo
2 + 7 = 7 + 2
9 = 9

c. **Asociativa:** Al agrupar los sumandos de diferente forma, siempre se obtiene el mismo resultado.

(a + b) + c = a + (b + c)

Ejemplo
(5+16) + 4 = 5 + (16+4)
(21) + 4 = 5 + (20)
25 = 25

d. **Elemento neutro (Modulativa):** La suma de cualquier número natural con el cero da como resultado el mismo número natural. El elemento neutro de la suma es el cero.

$$a + 0 = 0 + a$$

Ejemplo

$$9 + 0 = 0 + 9$$
$$9 = 9$$

B. SUSTRACCIÓN

$a - b = c$, donde a, b y c representan a cualquier número natural.
a es el minuendo, **b** el sustraendo y **c** la diferencia.

C. MULTIPLICACIÓN

$a \times b = c$, donde a, b y c representan a cualquier número natural
a y **b** son factores y **c** es el producto.

Otros signos utilizados en la multiplicación: • , * , ( ) , [ ] , y { }

Propiedades de la multiplicación:

a. **Clausurativa:** La multiplicación de dos números naturales siempre da como resultado un número natural.

$$a \times b = c$$

Ejemplo

$$10 \times 7 = 70$$

b. Conmutativa: El orden en el que se realice la multiplicación no altera el resultado.
El orden de los factores no altera el producto.

$$a \times b = b \times a$$

Ejemplo

$$18 \times 3 = 3 \times 18$$
$$54 = 54$$

c. **Asociativa:** No importa cómo se agrupen los factores el producto es igual.

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Ejemplo

$$(8 \times 5) \times 2 = 8 \times (5 \times 2)$$
$$(40) \times 2 = 8 \times (10)$$
$$80 = 80$$

d. **Elemento neutro:** El producto de un número natural con uno da como resultado el mismo número natural.

El elemento neutro de la multiplicación es el uno.

$$a \times 1 = a \quad \text{ó} \quad 1 \times a = a$$

Ejemplo $6 \times 1 = 6$

e. **Anulativa:** Todo número multiplicado por cero da como resultado cero.

$$a \times 0 = 0 \quad \text{ó} \quad 0 \times a = 0$$

Ejemplo $15 \times 0 = 0$

f. Distributiva:

Con respecto a la suma: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Ejemplo

$$4 \times (10 + 5) = 4 \times 10 + 4 \times 5$$
$$4 \times 15 = 40 + 20$$
$$60 = 60$$

Con respecto a la resta: $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

Ejemplo

$$6 \times (12 - 8) = 6 \times 12 - 6 \times 8$$
$$6 \times 4 = 72 - 48$$
$$24 = 24$$

D. DIVISIÓN

$d \overline{)\begin{matrix} C \\ D \\ R \end{matrix}}$, donde **d** es el divisor, **D** el dividendo, **C** el cociente y **R** el residuo.

Otros símbolos utilizados en la división: ÷, / , **:** , y —

2.2. NÚMEROS ENTEROS (Z)

El conjunto de los números enteros contiene a los números naturales, sus opuestos (números negativos) y el cero. Al igual que los números naturales, se cuentan de unidad en unidad. Simbólicamente, se puede representar como:

Z = {…….-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …….}

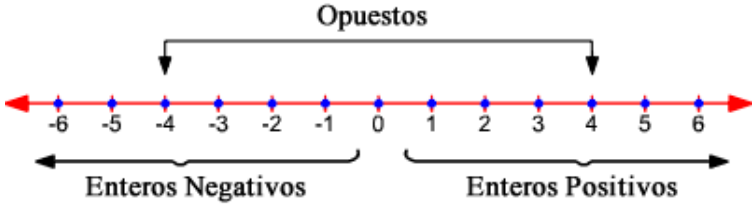
2.2.1. RECTA NUMÉRICA

En la recta numérica, los números enteros se representan así:

Fuente: recuperado de https://bit.ly/2YKVyMJ

2.2.2. NÚMEROS OPUESTOS

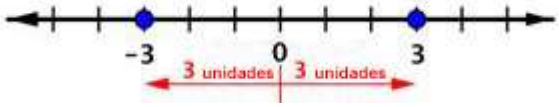
Dos números enteros se llaman así si están a la misma distancia de cero y tienen diferente signo. Es decir, el opuesto de **a** es **–a**. En la siguiente figura se puede ver que 4 y -4 son números opuestos, puesto que ambos están a cuatro unidades de distancia del cero, pero uno es positivo y el otro es negativo.



Fuente: recuperado de https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/integers

2.2.3. VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

Si **a ε Z**, el valor absoluto de **a** se denota **l a l** y es la distancia que existe entre **a** y el **cero**. Por ejemplo, en la siguiente figura se puede observar que el valor absoluto de -3 es 3, y el valor absoluto de 3 también es 3. Esto es debido a que, sin importar el signo que tengan, ambos números están a 3 unidades de distancia del cero.



Fuente: recuperado de https://bit.ly/31HRw53

(El valor absoluto de 0 es 0)

2.2.4. ORDEN DE LOS NÚMEROS ENTEROS

Al comparar dos números enteros a y b, entre ellos se cumple una y solo una de las siguientes relaciones:

- ✓ **a > b** (**a** es mayor que **b**), si al representarlos en la recta numérica, **a** se encuentra a la derecha de **b**.
- ✓ **a < b** (**a** es menor que **b**), si al representarlos gráficamente sobre la recta numérica, **a** se encuentra a la izquierda de **b**.
- ✓ **a = b** (**a** es igual a **b**), si al representarlos en la recta numérica, a **a** y **b** le corresponde el mismo punto.

2.2.5. PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS ENTEROS

A. ADICIÓN

CASO 1: Adición de dos números enteros de igual signo:
Se suman los valores absolutos de los sumandos y, al resultado, se le antepone el signo común de los sumandos.

Ejemplos: a). 2 + 4 = 6 b) -8 + -19 = -27

CASO 2: Adición de dos números enteros de diferente signo:
Se restan los valores absolutos de los sumandos y al resultado se le antepone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos: a). -14 + 3 = -11 b). -10 + 25 = 15

Propiedades de adición de los números enteros:

Además de las 4 propiedades de la adición de los números naturales se agrega la siguiente propiedad.

e. **Inverso aditivo u opuesto:** Todo número entero sumado con su opuesto da como resultado cero.

$$a + (-a) = 0 \quad \text{ó} \quad (-a) + a = 0$$

Ejemplo $5 + (-5) = 0$

B. SUSTRACCIÓN

Para encontrar la diferencia de dos números enteros, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo. Es decir, a – b = a + (-b).

Ejemplos

a). 34 - 12 = 34 + (-12) = 22 b). 35 – 50 = 35 + (-50) = -15
c). - 25 – 15 = -25 + (-15) = -40 d). 22 - (-10) = 22 + (10) = 32

Supresión de signos de agrupación:

En las expresiones en las cuales se combinan adiciones y sustracciones con números enteros, se utilizan signos de agrupación con el fin de diferenciar el signo del número con respecto al signo de la operación.

Para resolver expresiones de esta clase, se deben eliminar los signos de agrupación teniendo en cuenta lo siguiente:

- ✓ Cuando el signo de agrupación esta precedido por el signo +, se suprime dejando las cantidades que están en su interior con el mismo signo.

Ejemplo

a). (35) + (20) = 35 **+** 20 = 55 b). (16) + (**-** 30) = 16 **–** 30 = -14
c). (**-**60) + (90) = **-**60 + 90 = 30 d). (**-**46) + (**-**34) = **-**46 **–** 34 = - 80

- ✓ Cuando un signo de agrupación va precedido por el signo - , se suprime cambiando de signo las cantidades que se encuentran en su interior.

Ejemplo

a). 78 **–** (43) = 78 **–** 43 = 35 b). 11 **–** (**-** 44) = 11 **+** 44 = 55

C. MULTIPLICACIÓN

Para multiplicar dos números enteros se debe tener en cuenta lo siguiente:

. Si los números tienen el mismo signo, se multiplican los valores absolutos de cada factor y el producto respectivo es positivo.

Ejemplos:
a). 12 x 5 = 60 b). (-120) x (-3) = 360

. Si los números son de distinto signo, se multiplican los valores absolutos de los factores y el respectivo producto es negativo.

Ejemplos:
a). 33 x (-10) = -330 b). (-60) x 4 = -240

Propiedades de la multiplicación:

Las propiedades que tiene la multiplicación de los números enteros son las mismas 6 que tienen los números naturales**.**

D. DIVISIÓN

Si a, **b ε Z** con **b ≠ 0** se llama cociente exacto de **a** y **b** al número **c ε Z** tal que **b * c = a**

Para hallar el cociente entre dos números enteros se debe de considerar:

- ✓ El cociente de dos números enteros de igual signo es positivo.

Ejemplo a). 12/4 = 3 b). (-50) / (-5) = 10

- ✓ El cociente de dos números enteros de distinto signo es negativo.

Ejemplo a). (-44) / 11 = - 4 b). 360 / (-180) = - 2

- ✓ El cociente de cualquier número entero distinto de cero entre uno es el mismo número entero:

$$a \div 1 = a$$

Ejemplo $5 \div 1 = 5$

Ejemplo $-5 \div 1 = -5$

- ✓ El cociente de cero entre cualquier número entero diferente de cero es cero:

$$0 \div a = 0$$

Ejemplo $0 \div 100 = 0$

- ✓ El cociente de cualquier número entero entre cero no está definido (indefinido)

$$a \div 0 = \text{Indefinido}$$

Ejemplo $3 \div 0 = \text{Indefinido}$

- ✓ El cociente de cero dentro de cero es indeterminado.

Ejemplo $0 \div 0 = \text{Indeterminado}$

2.2.6. JERARQUÍA OPERATIVA:

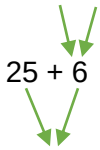
Norma matemática que nos indica el orden en el cual deben realizarse las operaciones dentro de un complejo de estas, de acuerdo a niveles jerárquicos esta:

Nivel 1:	Se simplifican y se verifican las operaciones contenidas en símbolos de agrupación más internos; luego los más externos. Generalmente en este orden de símbolos. a. ( ) b. [ ] c. { }
Nivel 2:	Funciones
Nivel 3:	Potencias y radicales
Nivel 4:	Multiplicación y división
Nivel 5:	Suma y resta

En ausencia de símbolos de agrupación, por ejemplo, la multiplicación debe de realizarse antes que la adición o la sustracción. **Para operaciones que están en el mismo nivel jerárquico se procede de izquierda a derecha** (Esto significa que tendrá prioridad aquella operación que en su momento aparezca más a la izquierda).

Ejemplos Aplique jerarquía operativa para determinar el resultado correcto:

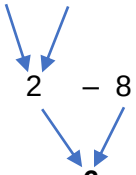
a. **25 + 3 x 2** Primero se multiplica



25 + 6 Luego se suma

31 **Respuesta**

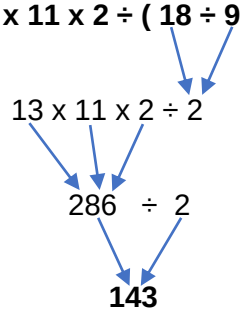
b. **30 ÷ 15 – 8** Primero se divide



2 – 8 Luego restamos

– 6 **Respuesta**

c. **13 x 11 x 2 ÷ (18 ÷ 9)** Primero se resuelva la operación que está entre paréntesis

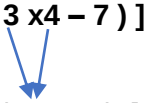


13 x 11 x 2 ÷ 2 Después se multiplica (operando de izquierda a derecha)

286 ÷ 2 Finalmente se divide

143 **Respuesta**

d. **15 – 2 [41 – 6 (3 x4 – 7)]** Primero se opera el paréntesis (primero la multiplicación)



15 – 2 [41 – 6 (12 – 7)] Después operamos la sustracción del paréntesis

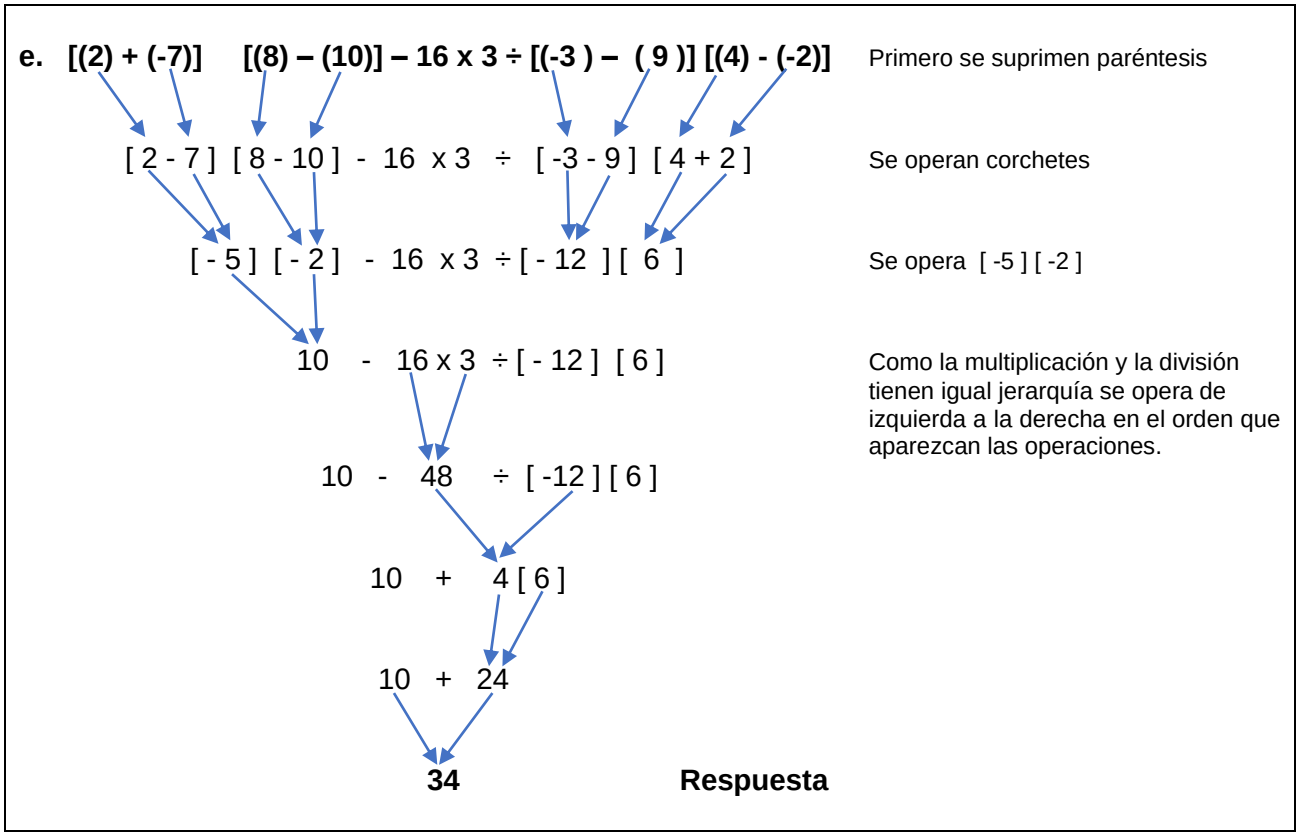
15 – 2 [41 – 6 (5)] Seguimos con las operaciones entre corchetes primero la multiplicación

15 – 2 [41 - 30] Luego la sustracción que esta entre corchetes

15 – 2 [11] Multiplicamos antes de restar

15 – 22 Restamos

- 7 **Respuesta**



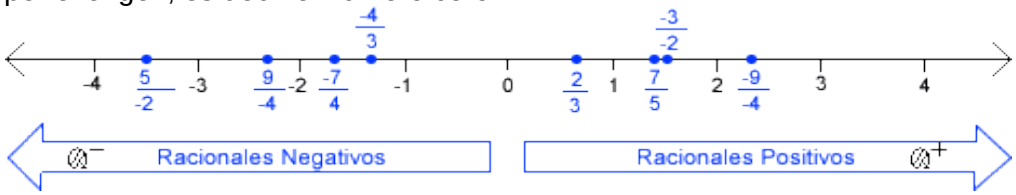
2.3. NÚMEROS RACIONALES (Q)

Los números racionales, son el conjunto de números fraccionarios y números enteros representados por medio de fracciones. Este conjunto está situado en la recta real numérica, pero a diferencia de los números naturales que son consecutivos, los números racionales no poseen consecución pues entre cada número racional existen infinitos números que solo podrían ser escritos durante toda la eternidad.

$$\boldsymbol{Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| (a \wedge b) \in Z \wedge n \neq 0 \wedge mcd(a,b) = 1 \right\}}$$

2.3.1. RECTA NUMÉRICA

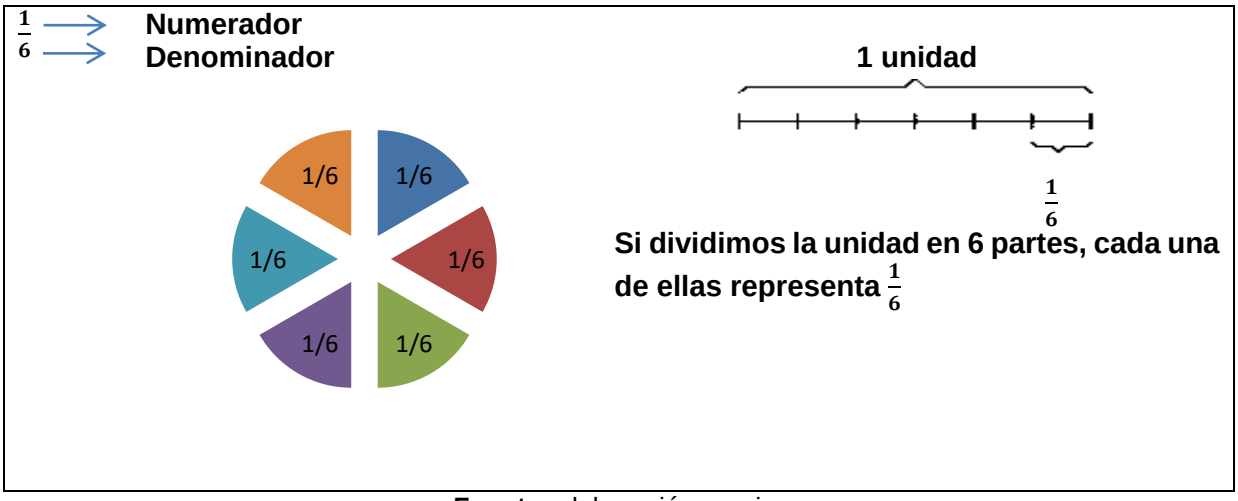
Es un gráfico unidimensional de una línea en la que los números enteros son mostrados como puntos especialmente marcados que están separados uniformemente. La recta numérica incluye todos los números reales, continuando ilimitadamente en cada sentido. Está dividida en dos mitades simétricas por el origen, es decir el número cero.



Fuente: elaboración propia.

2.3.2. ELEMENTOS DE UNA FRACCIÓN

Una fracción consta de dos términos, llamados numerador y denominador. El denominador indica en cuántas partes iguales se ha dividido la unidad principal, y el numerador, cuántas de esas partes se toman.



Fuente: elaboración propia.

2.3.3. TIPOS DE FRACCIONES

A. Fracciones propias e impropias

Las fracciones impropias son las que tienen el numerador más grande que el denominador.

Ejemplo: $\frac{4}{3}$

Las fracciones propias son las que tienen el denominador más grande que el numerador.

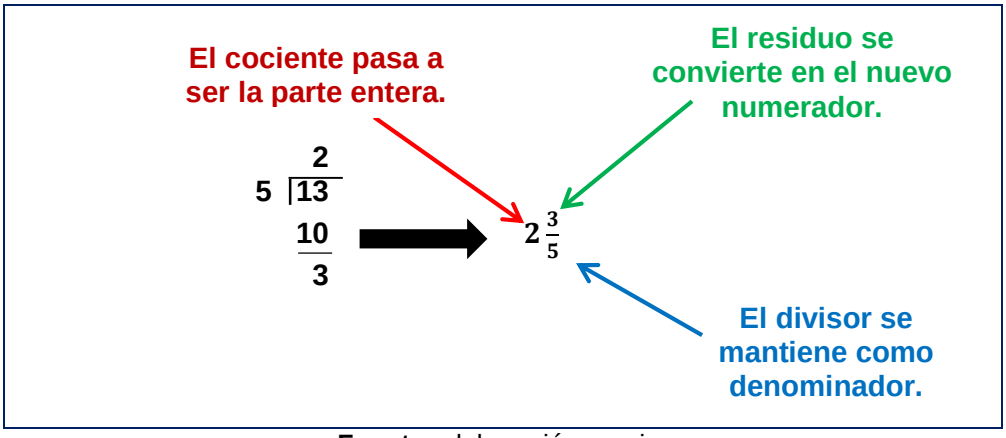
Ejemplo: $\frac{5}{9}$

2.3.4. NÚMERO MIXTO

De fracción impropia a número mixto

Sea $\frac{13}{5}$

Como el numerador (13) es mayor que el denominador (5), se trata de una fracción impropia, por lo que se debe dividir:



Fuente: elaboración propia.

De número mixto a fracción impropia

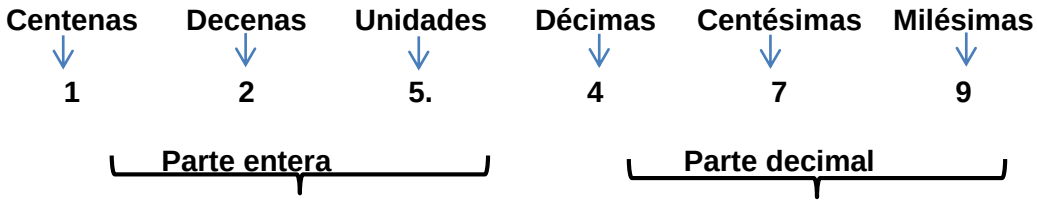
Se multiplica la parte entera por el denominador de la parte fraccionaria y se le suma el numerador de la parte fraccionaria y el denominador de la parte fraccionaria divide a todo.

$$2\frac{3}{4} = \frac{(2 * 4) + 3}{4}$$

$$2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

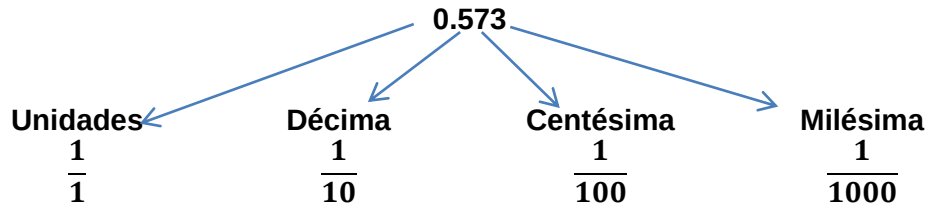
2.3.5. NÚMEROS RACIONALES DECIMALES

Están formados por una parte entera y una parte decimal.



Como se lee: 125 enteros 479 milésimas

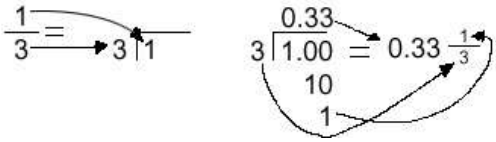
Decimales



Como se lee: 573 milésimas

A. EXPRESIÓN DE FRACCIONES COMO NÚMEROS DECIMALES

Para expresar números racionales en forma decimal se divide el numerador entre el denominador, y el cociente que se obtiene es un numero racional decimal.



$\frac{1}{3} = 0.3$

$\frac{1}{2} = 0.5$

B. REPRESENTACION DECIMAL DE UN NÚMERO RACIONAL

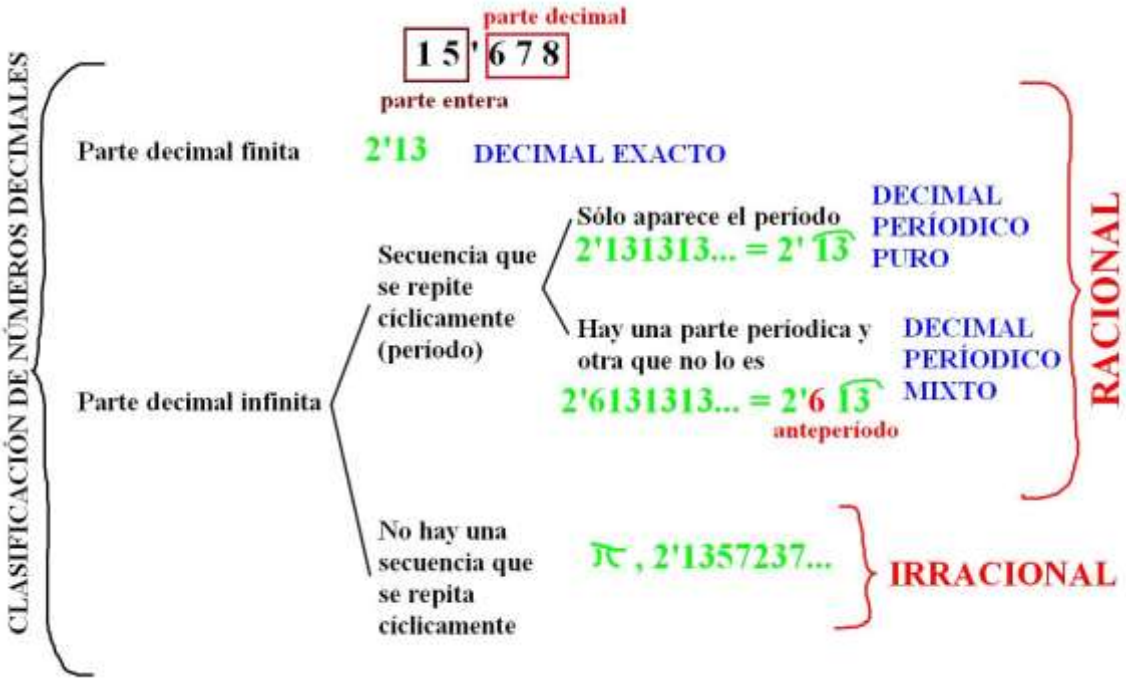
Las fracciones racionales $\frac{7}{10}$, $\frac{17}{100}$, $\frac{9}{1000}$, cuyo denominador es una potencia de 10, se les conocen como fracciones decimales.

$\frac{6}{10} = 0.6$ **(seis décimas)**

$\frac{4}{100} = 0.04$ **(cuatro centésimas)**

$\frac{13}{1000} = 0.013$ **(trece milésimas)**

C. CLASIFICACION DE LOS NÚMEROS RACIONALES DECIMALES:



Fuente: Recuperado de http://masmates-igv-2bach.blogspot.com/2010/11/blog-post_22.html

D. CONVERSIÓN DE DECIMAL A RACIONAL

a. De decimal exacto a fracción irreducible

Se escribe en el numerador el número completo sin el punto decimal y en el denominador se escribe un uno y se agregan tantos ceros como cifras (dígitos) tenga la parte decimal. Finalmente, si es posible, se simplifica.

Por ejemplo:

$$\mathbf{0.32} = \frac{\mathbf{32}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{25}}$$

$$\mathbf{0.08} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{25}}$$

b. De decimal periódico puro a fracción irreducible

En el numerador se escribe el número completo sin el punto decimal y se le resta la parte no periódica, en el denominador se agregar tantos nueves como cifras tenga la parte periódica. Finalmente se simplifica si es posible.

Por ejemplo:

a) $\mathbf{57.\overline{18}} = \frac{\mathbf{5718-57}}{\mathbf{99}} = \frac{\mathbf{5661_{\div 9}}}{\mathbf{99_{\div 9}}} = \frac{\mathbf{629}}{\mathbf{11}}$

b) $\mathbf{1.\overline{13}} = \frac{\mathbf{113-1}}{\mathbf{99}} = \frac{\mathbf{112}}{\mathbf{99}}$

c) $\mathbf{0.\overline{1769}} = \frac{\mathbf{1769}}{\mathbf{9999}}$

d) $\mathbf{2234.\overline{1}} = \frac{\mathbf{22341-2234}}{\mathbf{9}} = \frac{\mathbf{20107}}{\mathbf{9}}$

c. De decimal periódico mixto a fracción irreducible

En el numerador se escribe el número completo sin el punto decimal y se le resta la parte no periódica, en el denominador se agregan tantos nueves como cifras tenga la parte periódica y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica que se encuentra después del punto decimal.

a) $\mathbf{0.4248\overline{8}}\ldots = \frac{\mathbf{4248-424}}{\mathbf{9000}} = \frac{\mathbf{3824}}{\mathbf{9000}} = \frac{\mathbf{478}}{\mathbf{1125}}$

b) $\mathbf{0.58\overline{8}}\ldots = \frac{\mathbf{58-5}}{\mathbf{90}} = \frac{\mathbf{53}}{\mathbf{90}}$

c) $\mathbf{0.3\overline{42}}\ldots = \frac{\mathbf{342-3}}{\mathbf{990}} = \frac{\mathbf{339}}{\mathbf{990}} = \frac{\mathbf{113}}{\mathbf{330}}$

2.3.6. FACTORIZACIÓN DE NÚMEROS

A. MULTIPLO: M

El múltiplo de un número natural es el producto de este número por cualquier número natural empezando por el cero. Es un conjunto infinito.

Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces. Por ejemplo: 4 es múltiplo de 2 porque lo contiene 2 veces. Para obtener los múltiplos de un número, lo multiplicamos por cada uno de los números naturales.

4*0	4*1	4*2	4*3	4*4	4*5	4*6	4*7	4*8	…
0	4	8	12	16	20	24	28	32	…

B. DIVISOR: D

Divisor de un número natural es aquel que divide a este número en forma exacta. Es un conjunto finito.

$$\mathbf{D18} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{6}, \mathbf{9}, \mathbf{18}\}$$

C. NÚMERO PRIMO:

Son los números que tienen dos divisores la unidad y el mismo número.

NÚMEROS PRIMOS EN ROJO									
0	1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9
10	**11**	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**
20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**
30	**31**	32	33	34	35	36	**37**	38	39
40	**41**	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49
50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**
60	**61**	62	63	64	65	66	**67**	68	69
70	**71**	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**
80	81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**
90	91	92	93	94	95	96	**97**	98	99

D. NÚMERO COMPUESTO

Es el número que tiene más de dos divisores. Ejemplos: 4, 6, 8, 9 y 10.

Números	Divisores
4	**1, 2, 4**
6	**1, 2, 3, 6**
8	**1, 2, 4, 8**
9	**1, 3, 9**
10	**1, 2, 5, 10**

E. CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD:

Un número es divisible exactamente entre:

Número	Criterio
2	Si el número termina en cero o cifra par (el cero se considera par)
3	Si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3
4	Si el número formado por las dos últimas cifras es un múltiplo de 4 o cuando termina en doble cero.
5	Si la última cifra es 0 o 5.
6	Si el número es divisible por 2 y 3.
7	Si al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 2 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es múltiplo de 7.
8	Si el número formado por las tres últimas cifras es un múltiplo de 8.
9	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
10	Si la última cifra es 0.
11	Si sumando las cifras del número en posición impar por un lado y las de posición par por otro. Luego se resta el resultado de ambas sumas obtenidas. Si el resultado es 0 o un múltiplo de 11, el número es divisible por este.
12	Si el número es divisible por 3 y 4
13	Si al separar la última cifra de la derecha, multiplicarla por 9 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 13.
17	Si al separar la última cifra de la derecha multiplicarla por 5 y restarla de las cifras restantes la diferencia es igual a 0 o es un múltiplo de 17.

F. FACTORIZACION EN PRIMOS (DESCOMPOSICION FACTORIAL)

Teorema fundamental de la aritmética.

Consiste en expresar un número compuesto como producto de factores primos.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	-

60 = 2×2×3×5 **60 = 2^2×3×5**

G. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El mcm de dos o más números es el producto de sus divisores primos comunes y no comunes.

27	**45**	3
9	15	3
3	5	3
1	5	5
1	1	-

MCM (27, 45) = **3×3×3×5** = **135**

MCM (27, 45) = **3^3×5 = 135**

Multiplos de 3

0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 ...

Multiplos de 4

0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 ...

El MCM de 3 y 4 es 12

H. MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD):

El MCD de dos o más números es el producto de sus divisores primos comunes.
Calcula, el MCD de los siguientes números:

60	**150**	**360**	2
30	75	180	3
10	25	60	5
2	5	12	-

MCM (60, 150, 360) = **2×3×5** =**30**

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

FORMA LARGA

Div (12)____{1, 2, 3, 4, 6, 12}

Div (18)____{1, 2, 3, 6, 9, 18}

m.c.d (12,18)= 6

I. PRIMOS RELATIVOS:

Números primos entre sí (P.E.S.I.)

Se les denomina también primos relativos o coprimos, y son aquellos números que tienen como único divisor común a la unidad.

Ejemplo: 6, 14, 21 son números P.E.S.I.

Divisores:

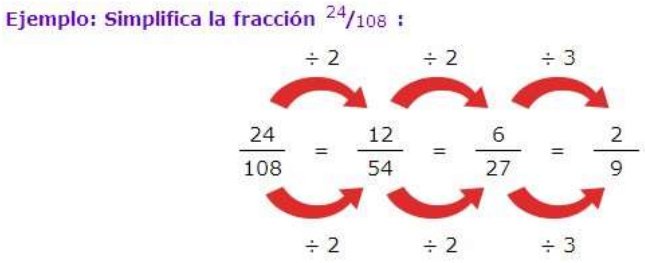
6_____ {**1**, 2, 3, 6}

14____ {**1**, 2, 7, 14}

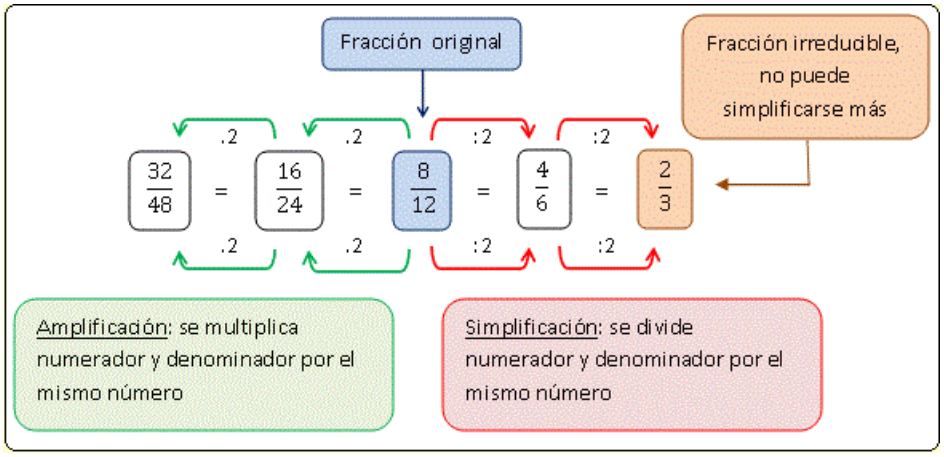
21____ {**1**, 3, 7, 21}

…Porque el único divisor común es 1.

2.3.7. SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES



$$\frac{12}{36} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3}$$



Fuente: recuperado de https://fatimatematica.wordpress.com/fracciones/fraccion-equivalente-fraccion-irreducible/

2.3.8. OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Como regla general, en cálculos aritméticos con números racionales, primero se deben de simplificar las fracciones si es posible y, después de operar vuelva a simplificar si es posible (S.O.S)

A. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

Se suman o se restan los valores correspondientes a los numeradores y se deja el mismo denominador.

A. $\frac{3}{8} + \frac{7}{8} = \frac{+3+7}{8} = \frac{10}{8}$

B. $\frac{9}{11} - \frac{5}{11} = \frac{+9-5}{11} = \frac{4}{11}$

C. $-\frac{6}{5} + \frac{13}{5} = \frac{-6+13}{5} = \frac{7}{5}$

D. $-\frac{1}{7}-\frac{6}{7}+\frac{11}{7}=\frac{-1-6+11}{7}=\frac{4}{7}$

B. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES CON DIFERENTE DENOMINADOR

a. Primera forma

Ejemplo :

$\frac{7}{12}+\frac{3}{9}-\frac{4}{24}$ **Primero simplificamos numerador con denominador de la misma fraccion** y luego seguimos operando. La segunda fraccion dividimos el numerador y denominador dentro de 3 y la tercera fraccion dividimos numerador y denominador dentro de 4.

$\frac{7}{12}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$ Encontramos el mcm de los denominadores de las tres fracciones que es 12 y operamos

$\frac{1 \times 7 + 4 \times 1 - 2 \times 1}{12}$ Dividimos el mcm dentro de cada uno de los denominadores de cada una de las fracciones y los multiplicamos por el numerador de cada una de las fracciones colocando antes el signo que separa a cada una de las fracciones y finalmente operamos

$\frac{7 + 4 - 2}{12}$

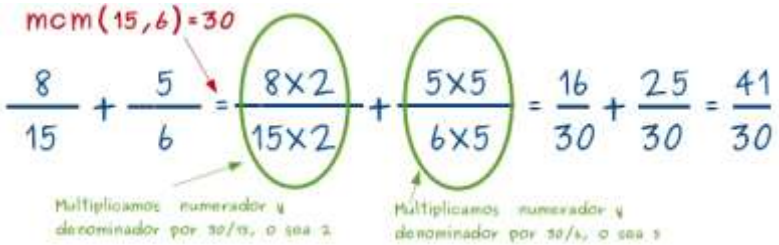
$\frac{9}{12}$ Simplificamos dividiendo numerador y denominador dentro de 3

$\frac{3}{4}$ Obteniendo finalmente la fraccion irreducible (fraccion que ya no es posible simplificar mas)

b. Por fracciones homogéneas

Se expresan las fracciones con igual denominador (Se transforman en fracciones homogéneas). Posteriormente se operan como fracciones con igual denominador (sumando los numeradores y copiando el denominador).

a.



b. $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}-\frac{3}{12}=\frac{5}{12}$

C. INVERSO ADITIVO

Todo número racional sumado son su opuesto da como resultado cero.

Para todo a/b ϵ Q existe (- a/b) ϵ Q tal que a/b + (-a/b) = 0

Ej.: El inverso aditivo de 4/5 es -4/5 porque 4/5 + (- 4/5) = 0

D. MULTIPLICACIÓN DE RACIONALES EN FORMA DE FRACCIÓN:

Primero se simplifica y luego se multiplican los numeradores entre si y los denominadores entre sí. Finalmente se vuelve a simplificar si es necesario.

Ejemplo:

$\frac{4}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{3}{6}$ Se divide dentro de 4 el numerador de la primera fracción (4) y el denominador de la segunda fracción (8). Se divide el numerador (3) y el denominador (6) dentro de 3. **Recuerde que se puede simplificar numerador con denominador de la misma fracción o de distinta fracción**

$\frac{1}{9} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{2}$ En la segunda fracción 2/2 es igual a uno

$\frac{1}{9} \times 1 \times \frac{1}{2}$ Se multiplica finalmente solo numeradores con numeradores y denominadores con denominadores

$\frac{1}{18}$ Respuesta final. Nota: Es mejor simplificar primero y luego realizar las multiplicaciones y no al contrario.

E. INVERSO MULTIPLICATIVO

También llamado recíproco.
Todo número racional multiplicado con su reciproco da como resultado 1.

Para todo a/b ϵ Q existe (b/a) ϵ Q tal que a/b x (b/a) = 1

Ejemplos:

$\frac{2}{3}$ es inverso multiplicativo de $\frac{3}{2}$ ya que $\frac{2}{3} * \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1$
$\frac{1}{5}$ es inverso multiplicativo de 5 ya que $\frac{1}{5} * 5 = \frac{5}{5} = 1$
8 es inverso multiplicativo de $\frac{1}{8}$ ya que $8 * \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$

F. DIVISIÓN DE RACIONALES EN FORMA DE FRACCIÓN

Para dividir dos números racionales se multiplica el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Donde $\frac{a}{b}$ es el dividendo y $\frac{c}{d}$ el divisor.

Ejemplo

$\frac{21}{30} \div \frac{7}{6}$ Utilizando la propiedad del inverso multiplicativo cambiamos el símbolo de la división entre dos fracciones por el de la multiplicación y en la segunda fracción cambiamos el numerador al denominador y el denominador al numerador (Comúnmente se dice que le damos vuelta)

$\frac{21}{30} \times \frac{6}{7}$ **Procedemos a simplificar numerador con denominador de la misma fracción o de distinta fracción**. En este caso se divide dentro de 7 el numerador de la primera fracción (21) y el denominador de la segunda fracción (7). Además dividimos dentro de 6 el denominador de la primera fracción (30) y el numerador de la segunda fracción (6).

$\frac{3}{5} \times \frac{1}{1}$ Finalmente multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador .

$\frac{3}{5}$

G. FRACCIONES COMPLEJAS

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{7} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}} = \frac{3 \cdot 7}{2 \cdot 5} = \frac{21}{10}$$

Ejemplo

$$\frac{\frac{5}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 3}$$

Primero simbolizamos cada parte de la fracción con letras A / B y operamos por separado

A: $\frac{5}{2} - \frac{1}{3}$ Simplificamos las fracciones de ser necesario y encontramos el mcm que es 6 y operamos

$$\frac{3x5 - 2 \times 1}{6} = \frac{15 - 2}{6} = \frac{13}{6}$$

B: $\frac{1}{3} + 3$ Simplificamos si fuera posible y operamos mcm 3

$$\frac{1 \times 1 + 3 \times 3}{3} = \frac{1 + 9}{3} = \frac{10}{3}$$

Luego unimos las partes: A/B

$$\frac{\frac{13}{6}}{\frac{10}{3}}$$. Aplicamos la propiedad del producto de extremos y producto de medios

$$\frac{13 \times 3}{6 \times 10}$$ Extremos / Medios — Simplificamos dividiendo el extremo (numerador) 3 y el medio (denominador) 6 dentro de 3.

$$\frac{13 \times 1}{2 \times 10}$$ Finalmente multiplicamos en línea recta horizontal

$$\frac{13}{20}$$

H. POLINOMIOS ARITMÉTICOS

Como regla general, en cálculos aritméticos con números racionales, primero se deben de simplificar las fracciones si es posible y, después de operar vuelva a simplificar si es posible (S.O.S.)

Se debe de tener en cuenta la jerarquía operativa.

Nivel 1: Se simplifican y se verifican las operaciones contenidas en símbolos de agrupación más internos; luego los más externos. Generalmente en este orden de símbolos.

a. ( ) b. [ ] c. { }

Nivel 2: Funciones

Nivel 3: Potencias y radicales

Nivel 4: Multiplicación y división

Nivel 5: Suma y resta

En ausencia de símbolos de agrupación, por ejemplo, la multiplicación, debe de realizarse antes que la adición o la sustracción. Para operaciones que están en el mismo nivel jerárquico se procede de izquierda a derecha (Esto significa que tendrá prioridad aquella operación que en su momento aparezca más a la izquierda).

Ejemplo

a)

$$\frac{15}{8} : \left[\frac{10}{4} \cdot \left(\frac{-5}{3}\right)\right]$$

Primero se operan paréntesis y signos de agrupación.

$$\frac{15}{8} : \left[\frac{-50}{12}\right]$$

Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador.

$$\frac{15}{8} : \left[\frac{-25}{6}\right]$$

La fracción resultante se simplifica.

$$\frac{15}{8} \cdot \left[\frac{6}{-25}\right]$$

Se procede a hacer la división, la cual se puede convertir En multiplicación por el inverso multiplicativo.

$$\frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{-5 \cdot 5}$$

Se pueden factorizar los números para facilitar la simplificación.

$$\frac{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2}{-5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$$

Se simplifican los términos.

$$\frac{3 \cdot 3}{-5 \cdot 2 \cdot 2}$$

Se realiza la multiplicación.

$$-\frac{9}{20}$$

Resultado.

b)

$2 : \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)-3\left(1+\frac{1}{2}\right)$	Se operan paréntesis y signos de agrupación.
$2 : \left(\frac{1+3}{6}\right)-3\left(\frac{2+1}{2}\right)$	Se realizan las sumas tomando en cuenta el denominador común.
$2 : \left(\frac{4}{6}\right)-3\left(\frac{3}{2}\right)$	Se simplifican las fracciones resultantes y se opera la multiplicación.
$2 : \left(\frac{2}{3}\right)-\frac{9}{2}$	Se realiza la división, la cual se puede realizar multiplicando Con el inverso aditivo.
$2 \cdot \frac{3}{2}-\frac{9}{2}$	Se opera primero la multiplicación.
$3-\frac{9}{2}$	Se realiza la resta tomando en cuenta el denominador común
$\frac{6-9}{2}$	Se opera la resta.
$\boldsymbol{\frac{-3}{2}}$	**Resultado**

2.3.9. APLICACIONES DE FRACCIONES, MCD Y MCM

Ejemplos

MCM

1. Tres paisanos del interior de la republica de se van a trabajar fuera de su pueblo en la misma fecha a el departamento de Guatemala. Desde la fecha en la cual partieron juntos, el primero regresa a su pueblo a visitar a su familia cada 15 días, el segundo cada 30 días y el tercero cada 45 días. ¿**A los cuantos días coincidirán por primera vez en su pueblo los tres paisanos?**

15 – 30 – 45	**5**
3 - 6 - 9	**3**
1 - 2 - 3	**2**
1 - 3	**3**
1	

mcm = 5 x 3 x 2 x 3 = 90 días

MCD

2. En el laboratorio de química hay tres recipientes que contienen una solución. La capacidad de los recipientes es de 6,300 mililitros (ml), 5,400 ml y 4,200 ml. La solución se repartirá en probetas igual capacidad y se desea que esta sea la máxima posible. Determine:

a). ¿Qué capacidad debe de tener cada probeta?

b). ¿Cuántas probetas son necesarias?

a).

6,300 – 5,400 – 4,200	**100**
63 - 54 - 42	**3**
21 - 18 - 14	

Mcd = 100 x 3 = 300

b). 21+18+14 = **53 probetas de 300 ml cada una**.

FRACCIONES:

1. **Si una persona gasta las 3/5 partes de su sueldo mensual, cuando han transcurrido las 2/3 partes del mes. Considerando que mantiene el mismo patrón de gasto. ¿Con que fracción del sueldo se quedara al final del mes que tiene 30 días? Si la persona recibe un sueldo neto de Q.10,000.00 cada mes, ¿cuánto dinero le quedará al final del mes?**

Dinero gastado: 3/5 x 10,000 = Q.6,000.00

Tiempo trascurrido: 2/3 x 30 = 20 días

Razón de gasto por día = 6,000/20 días = Q.300.00 por día

Dinero que no se ha utilizado = Q.4,000.00

Días que faltan para terminar el mes = 10 días

Dinero gastado en los 10 días que faltan para terminar el mes:
10 días * Q.300.00 = Q.3,000

Gasto total en el mes = Q.9,000.00

Fracción de sueldo que queda al final del mes= 1,000/10,000 = 1/10

2. **El propietario de un terreno ha decidido venderlo en parcelas. Vendió primero 3/7 del mismo, después la mitad de lo restante y aún le quedaron 244 m^2 sin vender. ¿Cuál era la superficie del terreno?**

Fracción del terreno que queda del total del terreno: 7/7 – 3/7 = 4/7

Segunda fracción vendida:

Primer forma:
1/2 x 4/7 = 2/7

Segunda:
4/7÷ 2 = 2/7 resto del terreno

Fracción del terreno que se ha vendido = 3/7 + 2/7 = 5/7

Fracción que queda sin vender = 7/7 – 5/7 = 2/7 que equivale a 244m^2

Por lo que 1/7 = 122m^2

Área total del terreno= 122m^2 x 7 = **854m^2**

HOJA DE TRABAJO

A. Encuentre el valor de las siguientes expresiones:

1) $-20 \div 4 - 6(-5)$
2) $20(-4) \div 10 - 6 \div (5-7)$
3) $3 + 2(-2-3) - 7(1-5)$
4) $2(-2-6) - 7 + 4(8-1)$
5) $520 + [8 - 3 + \{9 - (4+2-1)\}]$
6) $2\{9 - 2[(3+1) - (1+1)]\}$
7) $12 \div 4 \times 3 - 8 \div 4 \times 2$
8) $(26+2) \div (-4) - 10(8-12)$
9) $18 \div 3 \times 6 - (7-35) \div 14$
10) $7 - 3(45 - 5 \times 3^2)^2$
11) $4 \times 3 - 2^2 \times 4 + 7 - 3$
12) $[12 + 4(9 - 2 \times 3)^3] \div 10 - 3$
13) $[-3\{2 - (7-5) \div 6\}]^2$
14) $9 + 5 \times 8 - 7 \times 5 - 20$
15) $3 \times 5 - 2 \times 7 + 6 \times 3$
19) $(5-21) \div (-8) + 3(9-1)$
20) $8 \div 2 \times 4 - 6 \div 3 \times 3$
21) $-6(9)(-5) - 10(-7)(-6)$
22) $8 + 2(-4) - 6(7-8)$
23) $(-3) - 2\{5 - 3[2 - 2(3-6)]\}$
24) $72 \div (-18) \times 4 - (3-12) \div (-9)$
25) $8 \times 6 \div 3 - 5(3-7)$
26) $(5-21) \div (-8) + 3(9-1)$
27) $-\{-[3 + (3-8) - (-15+7) - 4]\}$
28) $[3(9 \times 4 + 3) - 3(4-8)] \div 7 \times 7 - (9 + 13 - 18)$
29) $3^2 + 5 - 3[(8 \div 6 \times 4) - 3] + 5^3 - 4^2 \times 7$
30) $(12 \div 6)^2 - 4 \div 2(6 \div 2) + 3^2 + 22 \div 11$
31) $[4^2 - 5(2 \times 3 - 2^2)^3 + 3] \div 3 - 20$
32) $15 - 2[21 - 6(3 \times 5 - 7)]$
33) $\frac{(9-4^2)^2}{7} + \frac{21(19-4)}{35}$
16) $[60 \div 4 + (-8 + 3 \times 2)^2(5 + 3 - 25)^3] - 91\{3(14 \div 7 - 3)[3 - 2(8-10)^5] - 14\}$
17) $-\{10 - 3 \times 4[17 + 3(5-13)] - [-32 + 4(-9-2-11)(-15+11)] \div 5\}$
18) $-\{-[3 + (3-8) - (-15+7) - 4]\} + 6^4 \div 6^2 - 20 \div 6 \times 7 - (7-35) \div 12$
34) $-80 \div \{[-3 - 4(9-5)^2 - 3(-7-10)] \div 4 - 36 \div 3^2 + 3[5 - (7-10)]\}$
35) $\{15 - 7[4 - 2(-18-6)] - [18 \times 20 - 7(-2 \times 9 - 11)]\} \div \{15 - 2[14 - 6(5-50) + 8(-5-3)] - 31\}$
36) $\{15 + (9-5)2\}\{(6 \times 4) \times 3 + (5-4)(4-3)\}$
37) $8 + [9 - \{6 - (5-4)\}] + 14 - [11 - \{7 - (3-2)\}]$
38) $[(+2) + (-7)][(+8) - (+10)] - 16 \times 3 \div [(-3) - (+9)][(+4) + (-2)]$
39) $18 \div 6 \times [-2(-18-6)] - \{(6 \div 3 \times 2 + 5)[-7(-2 \times 9 - 46)]\} \div (-2) \times 15 \div \{[-6(5-15)](-5-3)\}$

B. Reducir a su mínima expresión las siguientes fracciones, utilizando la definición del MCD.

40) $\frac{98}{147}$ 41) $\frac{1727}{1884}$ 42) $\frac{332}{415}$ 43) $\frac{90}{195}$ 44) $\frac{623}{979}$ 45) $\frac{225}{360}$ 46) $\frac{4359}{11624}$ 47) $\frac{144}{176}$ 48) $\frac{1212}{1515}$ 49) $\frac{126}{72}$

C. Obtenga los valores de las expresiones siguientes:

50) $\frac{9 \times 8}{18 \times 6}$ 51) $\frac{15-18}{-9}$ 52) $\frac{3 \times 2 \times 5}{6 \times 4 \times 10}$ 53) $\frac{-25-36}{5-9}$ 54) $\frac{20+7}{-6}$

55) $\frac{7-21}{-7}$ 56) $\frac{8}{4-16}$ 57) $\frac{24-9}{12+3}$ 58) $\frac{18-20}{3+5}$ 59) $\frac{5\times20\times18}{3\times6\times10}$

D. **Obtenga la fracción equivalente de cada uno de los números decimales siguientes:**

60) $0.\overline{6}$ 63) 0.04 66) 3.24 69) $7.\overline{325}$ 72) 0.15

61) $-0.3\overline{25}$ 64) 13.45 67) 1.144 70) -9.16 73) $2.\overline{884}$

62) $0.\overline{39}$ 65) $-7.\overline{7}$ 68) $0.9\overline{58}$ 71) $1.1\overline{6}$ 74) $-5.42\overline{3}$

E. Escriba las siguientes fracciones en forma decimal, indicando el tipo de cifra decimal que poseen.

75) $\frac{3}{2}$ 79) $\frac{23}{15}$ 77) $\frac{7}{9}$ 81) $\frac{7}{8}$ 83) $\frac{9}{16}$

76) $\frac{71}{12}$ 80) $\frac{17}{25}$ 78) $\frac{58}{111}$ 82) $\frac{37}{300}$ 84) $\frac{49}{11}$

F. Escriba las fracciones impropias siguientes como números mixtos.

85) $\frac{3}{2}$ 87) $\frac{98}{3}$ 89) $\frac{328}{15}$ 91) $\frac{825}{23}$ 93) $\frac{743}{29}$

86) $\frac{136}{11}$ 88) $\frac{973}{33}$ 90) $\frac{145}{6}$ 92) $\frac{29}{8}$ 94) $\frac{201}{16}$

G. Convierta los números mixtos siguientes a fracciones:

95) $2\frac{3}{5}$ 97) $2\frac{6}{7}$ 99) $3\frac{8}{9}$ 101) $31\frac{5}{6}$ 103) $3\frac{9}{13}$

96) $25\frac{3}{7}$ 98) $-21\frac{3}{13}$ 100) $16\frac{13}{15}$ 102) $18\frac{9}{17}$ 104) $-6\frac{11}{14}$

H. Opere y simplifique:

105) $\frac{6}{11}\div\left(\frac{5}{12}-\frac{23}{30}\right)$

106) $\frac{7}{15}-\frac{11}{24}-\frac{13}{36}$

107) $\frac{3}{2}-\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{5}{6}$

108) $\frac{5}{36}-\frac{4}{-63}+3-\frac{8}{-3}$

109) $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{5}+\frac{21}{63}\right)$

110) $\frac{11}{15}+\frac{8}{13}\left(\frac{3}{16}-\frac{11}{24}\right)$

111) $\frac{9}{10}+\frac{15}{-28}-\frac{7}{8}-\frac{11}{-12}$

112) $\left(4-\frac{1}{4}\right)\times\left(5-\frac{1}{5}\right)\div\frac{1}{18}$

113) $\frac{7}{12}+\left(-\frac{2}{5}\right)-\left(-\frac{6}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)$

114) $\frac{5}{8}-\frac{9}{8}\times\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\right)$

115) $\left(7+3\frac{1}{8}\right)\div\left(14+6\frac{1}{4}\right)$

116) $\frac{53}{25}+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)\div2\frac{1}{3}$

117) $-\frac{7}{24}-\frac{13}{24}-\frac{19}{24}$

118) $-\frac{7}{4}\div\frac{14}{8}(-3)$

119) $\frac{7}{8}+1\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{4}{9}$

120) $\frac{13}{19}-\frac{5}{27}\div\frac{22}{15}$

121) $\frac{1}{4}+\frac{5}{16}\times\frac{8}{3}-\frac{3}{8}$

122) $\frac{5}{12}-\frac{11}{36}\div\frac{22}{15}$

123) $\frac{3}{10}\div\left\{\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{4}-\frac{8}{3}\right)\right\}-\frac{11}{5}$

124) $\frac{7}{3}+\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{2}+\left\{\frac{9}{10}-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-1\right)\right\}\right]$

I. Resuelva las siguientes fracciones complejas

125) $\dfrac{\dfrac{\frac{2}{3}\left(3-\frac{3}{5}\right)}{3\frac{1}{5}}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{10}\right)}$

126) $\dfrac{\frac{4}{7}-\frac{3}{9}}{\frac{3}{27}-\frac{5}{6}\times\frac{2}{9}-1}+1$

127) $1+\dfrac{3-\frac{1}{5}}{1+\dfrac{\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{1}{\frac{3}{4}}}}$

128) $\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{4}\left(\frac{7}{14}-\frac{1}{5}+\frac{21}{63}\right)}{1-\dfrac{\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{7}}{3\frac{2}{7}}}$

129) $\dfrac{17}{5}-\dfrac{3+\frac{3}{2}}{1+\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}}$

130) $\dfrac{1-\dfrac{\frac{1}{2}+3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)}{3\frac{1}{2}}}{2+\dfrac{3}{\frac{2}{3}}}$

131) $\dfrac{\frac{5}{4}+\frac{3}{5}+\frac{7}{2}}{\dfrac{1+\frac{5}{3}}{\frac{3}{8}+\frac{1}{2}}}$

132) $1-\dfrac{1+\dfrac{3/2+1/3}{1-1/2}}{\dfrac{1+1/2+1/3}{1+1/2}}$

133) $\dfrac{\dfrac{\frac{12}{5}}{2}+\frac{6}{5}\left(-\frac{3}{2}\right)}{\dfrac{5+\frac{1}{7}}{-1+\frac{7}{\frac{28}{9}}-\frac{15}{3}}}$

134) $\dfrac{1-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{5}\right)}{1+\dfrac{1-\frac{1}{2}+3}{1-\dfrac{1-\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}}}}$

135) $\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}} - \dfrac{1-\frac{5}{3}}{\frac{3}{7}+\frac{9}{6}}$

136) $1 - \dfrac{1+\frac{1}{\frac{3}{2}-1}}{2-\frac{1}{\frac{3}{2}+1}}$

RESPUESTAS DE LOS EJERCICIOS PARES

Ejercicios A

2) -5
4) 5
6) 10
8) 33
10) 7
12) 9
14) - 6
16) - 72
18) 17
20) 10
22) 6
24) -17
26) 26
28) 125
30) 9
32) 69
34) -5
36) 1679
38) 18

Ejercicios B

40) 2/3
42) 4/5
44) 7/11
46) 3/8
48) 4/5

Ejercicios C

50) 2/3
52) 1/8
54) - 9/2
56) - 2/3
58) - ¼

Ejercicios D

60) 2/3
62) 13/33
64) 269/20
66) 81/25
68) 949/990
70) - 229/25
72) 3/20
74) - 1627/300

Ejercicios E

76) $5.91\overline{6}$; Periódica mixta.
78) $0.5\overline{225}$; Periódica mixta.
80) 0.68 ; Finita.
82) $0.12\overline{3}$; Periódica mixta.
84) $4.\overline{45}$; Periódica pura.

Ejercicios F

86) $12\frac{4}{11}$
88) $29\frac{16}{33}$
90) $24\frac{1}{6}$
92) $3\frac{5}{8}$
94) $12\frac{9}{16}$

Ejercicios G

96) $\frac{178}{7}$
98) $-\frac{276}{13}$
100) $\frac{253}{15}$
102) $\frac{315}{17}$
104) $-\frac{95}{14}$

Ejercicios H

106) $-\frac{127}{360}$
108) $\frac{493}{84}$
110) $^{17}/_{30}$
112) 324
114) $^{1}/_{4}$
116) 2
118) 3
120) $\frac{2099}{3762}$
122) $\frac{5}{24}$
124) $\frac{13}{5}$

Ejercicios I

126) $\frac{158}{203}$
128) $\frac{299}{388}$
130) $\frac{2}{91}$
132) $-\frac{31}{11}$
134) $\frac{1}{15}$
136) $-\frac{7}{8}$

J. Problemas generales:

137) Una granja avícola posee 525 aves, entre las cuales hay gallinas ponedoras, pollos de engorde y patos. Si los 5/7 del total son gallinas ponedoras y 2/5 del resto son pollos de engorde, determine el número de gallinas, pollos y patos en la granja.

138) En una institución educativa la cuota mensual por colegiatura es de Q2590.00, determine:
¿Cuánto deberá pagar un estudiante si le conceden 3/7 partes de beca mensualmente?
¿De cuánto será el ahorro de dicho estudiante al primer año de estudios?

139) Se desea dividir en secciones del mismo tamaño, de la mayor longitud posible y sin desperdiciar nada, 48 tubos de polietileno de 80 centímetros y 36 tubos de la misma clase, que miden 60 centímetros. ¿Cuál será la longitud que deberán medir las secciones y cuántos segmentos se obtendrán en total?

140) La temperatura de la ciudad de Guatemala llega a 13°C a las 2:00 p.m. Si comienza a disminuir a un promedio de 7/3 grados por hora, calcular la lectura en el termómetro a las 11:00 p.m.

141) Si un queso pesa ½ de libra, entonces ¿Cuál es el peso de un queso y medio?

142) Una mezcla de 100 litros contiene 4/5 partes de agua y el resto de un insecticida comercial que contiene ¾ partes de ingrediente activo. Determine:
¿Cuántos litros hay del producto comercial en la mezcla?
¿Cuántos litros hay de ingrediente activo en la mezcla?

143) Una finca posee 260 manzanas de terreno, de las cuales 2/5 partes están cultivadas con frutales y 3/10 partes con cultivos de granos básicos. Del área restante, ½ es usada para producción de hortalizas, 1/3 tiene bosques y el resto está ocupada por la infraestructura (instalaciones y oficinas). ¿Cuántas manzanas se ocupan entonces para frutales, granos, hortalizas, bosques e infraestructura?

144) Una empresa exportadora de naranjas desea empacar en cajas, con fines de transporte y envío, 560, 200 y 400 naranjas pequeñas, medianas y grandes respectivamente. Si desea introducir el mismo número de naranjas en todas las cajas y en la mayor cantidad posible; determine cuántas cajas de naranja pequeña, mediana y grande se transportarán al lugar de destino.

145) Tres rollos de alambre espigado miden 2172, 3136 y 1892 metros de longitud y se desea dividirlos en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. Encontrar la longitud de los pedazos y cuantos se obtendrán de cada rollo.

146) La empresa “EXCRUTASA” obtuvo ingresos el año anterior por Q250,000.00 por venta de café, maíz y frijol. De los ingresos totales, 3/5 partes se lograron por venta de café, y del resto de ingresos 7/10 partes correspondieron a venta de maíz. Si se vendieron 75 quintales de frijol, determine:
¿Cuál fue el ingreso percibido, en quetzales, por venta de café, frijol y maíz?
¿Cuál fue el precio de venta por quintal de frijol?

147) En un velódromo parten simultáneamente tres ciclistas de un mismo punto de largada. Uno de los ciclistas da una vuelta cada 30 segundos, otro cada 27 segundos y el tercero cada 24 segundos. ¿A los cuántos segundos cruzan los tres ciclistas juntos, por primera vez por el punto de largada? ¿Cuántas vueltas ha dado el tercer ciclista en ese momento?

RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS PARES

138) 375 gallinas
60 pollos
90 patos
140) - 8 °C
142) 15 litros
144) 14, 5 y 10 cajas
146) Q 150,000.00 por café.
Q 70,000.00 por maíz.
Q 30,000.00 por frijol.
Q 400.00 / qq de frijol.

EVALUACIONES

1. Evaluación 1

1) Indique qué enunciado(s) son falsos:

P) Todo número racional es entero. Q) Todo número entero es racional.

R) $\sqrt{2}$ es un número irracional. S) Todos los números decimales son irracionales

a). P y S | b) Q y R | c) S | d) Todas son falsas

2) Indique qué enunciado(s) son verdaderos:

P) π es un número racional Q) 3.7 es un número irracional

R) 44/11 es un número entero S) $\sqrt{5}$ es un número real

a) R | b) P y Q | c) Q y R | d) R y S

3) Indique qué número(s) decimal(es) es (son) racional(es):

P). $0.3\overline{42}$ Q). 0.54 R). $1.\overline{13}$ S). 1.412570169

a) P, Q y R | b) P y Q | c) P | d) S

4) En jerarquía matemática para operaciones que tienen el mismo nivel jerárquico procedemos a operar de:

P) De derecha a izquierda Q). De arriba para abajo

R) De izquierda a derecha S). De abajo para arriba

a) S | b) P | c) R | d) Q

5) El resultado correcto de la operación: 14 ÷ [7 (18 - 20)]

a) 1 | b) -1 | c) 4 | d) -4

6) El área de un círculo ($A = \pi r^2$) es un número:

a) Racional | b) Entero | c) Irracional | d) Natural

7) El resultado correcto de la operación: -2 + 3 [6 – 2 (3 -12)] es:

a) 110 | b) 38 | c) -38 | d) Ninguna es correcta

8) El resultado correcto de la operación: - 6 { 6 + 7 (5 – 2 x 4)+ 5} es:

a) -606 | b) 11 | c) 60 | d) Ninguna es correcta

9) De la operación: 5 – 2 [3 (7 – 4) – (- 12 + 3)] – 6 se tiene como resultado:

a) Un número natural
b) Un entero negativo
c) Un entero positivo
d) a y c es correcta

10) El número que representa la expresión: 12 – {-2 + 3 [4 – (12 - 8) + 1] – 2} + 3 es:

a) – 8 b) 4 c) -4 d) 16

11) Sistema de numeración que utilizó el cero

a) Babilónico b) Egipcio c) Binario d) Ninguna de las anteriores

12) En la adición, la siguiente expresión: a + b = b + a representa la propiedad:

a) Clausurativa b) Asociativa c) Conmutativa d) Ninguna es correcta

13) En operaciones como: 3 (4 + 5) , se puede realizar haciendo primero la suma entre paréntesis, obteniendo 3 (12). ¿Cuál de las propiedades de los números enteros se ha tomado como base al optar por dicho procedimiento?

a) Clausurativa b) Conmutativa c) Distributiva
d) Ninguna de las anteriores

14) Dentro del conjunto de operaciones contenidas en la expresión [- 3 { 2 – (17 – 5)÷ 3 }] ^{7} , hay una de ellas que debe realizarse primero al iniciar los cálculos debido a que :

a) La resta tiene prioridad sobre cualquiera de las otras operaciones contenidas en la expresión
b) La potencia tiene prioridad sobre cualquier otra operación contenida en dicha expresión
c) Debe realizarse primero la operación contenida dentro del corchete
d) Deben realizarse primero las operaciones contenidas dentro de los símbolos de agrupación desde los más internos hacia los más externos.

15) En cuáles de las siguientes propiedades de los números reales se sustenta lo siguiente (3 + 4) + (5 + 6) + 7 es igual a (6 + 5) + (4 + 7) + 3:

a) Distributiva y asociativa
b) Asociativa y conmutativa
c) Conmutativa y distributiva
d) El orden de los factores no altera el producto y propiedad del inverso aditivo

16) El resultado de la operación [-2 { - 4 – 3 } – 14] ÷ { 7 – 7 x 9 } , es :

a) 56 b) Cero c) -56 d) Ninguna es correcta

17) El resultado de la siguiente operación [3 (9 x 4 + 3) – 3 (4 – 8)] ÷ 7 x 7 - (9 + 13 – 18), es :

a) 857 ÷ 7 b) – 125 c) -857÷ 7 d) 125

18) Es el número que tiene la misma cantidad o magnitud pero su signo es diferente.

a) Valor absoluto b) Número opuesto c) Inverso aditivo
d) Ninguna de las anteriores

19) El resultado de la siguiente operación con números enteros:
(2 - 7) (8 - 10) – 16 x 3 ÷ [(-3-9) (4 - 2)]

a) 12 b) 260 c) – 30 d) 18

20) Qué relación de orden existe entre los dos siguientes números: - 10 con respecto a -3.

a) –10 es mayor que -3 b) –10 es menor que – 3 c) –10 es igual a – 3
d) Ninguna de las anteriores es correcta

2. Evaluación 2

SERIE I: (10 puntos; 5 c/u, 5 minutos)

Exprese cada fracción como un numero mixto o bien cada número mixto como una fracción.

a. $\frac{19}{11}$ **Respuesta:** 1 8/11

b. 7 6/10 **Respuesta:** 38/5

SERIE II: (15 puntos; 5 c/u , 10 minutos)

Determinar la fracción irreducible correspondiente a cada decimal

a). $2.\overline{136}$ **Respuesta:** 2134/999

b). 0.75 **Respuesta:** 3/4

c). $1.\overline{126}$ **Respuesta:** 125/111

SERI III: (15 puntos; 5 c/u , 10 minutos)
Exprese como un número decimal cada fracción, además indique que tipo decimal es.

a. $\frac{25}{20}$ **Respuesta:** 1.25 Decimal exacto.

b. $\frac{293}{495}$ **Respuesta:** $0.59\overline{1}$ Decimal periódico mixto.

c. $\frac{24}{9}$ **Respuesta:** $2.\overline{6}$ Decimal periódico puro.

SERIE IV: (30 puntos; 15 c/u, 10 minutos)
Calcule el MCM y el MCD de los siguientes números

a. 36, 60 y 48 **Respuesta:** MCM: 720 MCD: 12

b. 10, 11 y 20 **Respuesta:** MCM: 2,200 MCD: No existe.

SERIE V: (30 puntos ; 15 c/u , 25 minutos)
Opere y simplifique

a. - { 2/3 **+** [1/5 **--** (1/4 **+** 2/5) **–** 5/4] **+** 1 } **Respuesta:** 1/30

b. (4 **–** 1/4) (5 – 1/5) **÷** 2/5 **x** 4/25 **Respuesta:** 36/5

3. Evaluación 3

1) El resultado correcto de la operación: **(-4+5)÷(-1)+3-21÷(-7)÷3[-11x(-2)-19]** es:

a) -5 **b) 5** **c) 0** **d) Ninguna es correcta**

2) El inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es:

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{4}{3}$ **c)** $\frac{-4}{3}$ **d)** $\frac{3}{4}$

3) El resultado correcto de la operación:
- { 10 – 3 x 4 [17+ 3 (5 - 13)] – [- 32 + 4 (- 9 - 2 - 11) (-15 + 11)] ÷ 5 } es:

a) - 30 **b) 30** **c) 260** **d) Ninguna es correcta**

4) Indique el resultado de operar y simplificar la operación:

$$\frac{7}{3}+\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{2}+\left\{\frac{9}{10}-\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-1\right)\right\}\right]$$

a) 5/13 **b) 61/15** **c) 13/5** **d) 34/15**

5) El resultado de la operación $\left[-12+2(8-2\times3)^3\right]\div10-3$ es:

a) 48/7 **b) 9** **c) -9** **d) -13/15**

6) La fracción reducida equivalente al decimal **2.045** es:

a) 225/110 **b) 45/22** **c) 25/11** **d) Ninguna es correcta**

La siguiente fracción compleja le servirá para responder las preguntas 7, 8 y 9.

De la fracción compleja $\dfrac{17}{5}-\dfrac{3+\frac{3}{2}}{1+\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}}$

7) El resultado parcial de operar $1+\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}$ es:

a) 3/7 **b) 7/3** **c) 4/3** **d) 5/3**

8) El resultado parcial de operar $\dfrac{3+\frac{3}{2}}{1+\dfrac{3-\frac{1}{3}}{2+\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}}}$ es:

a) -9/10 **b) 27/10** **c) -27/10** **d) -21/2**

9) El resultado de **toda la operación** es:

a) 7/10 **b) -16/35** **c) 61/10** **d) 70/10**

10) El decimal equivalente a la fracción **51/11** es:

a) $4.0\overline{63}$ **b) $4.\overline{63}$** **c) $4.\overline{63}$** **d) Ninguna es correcta**

11) El resultado correcto de simplificar la operación:
$\{4+[(5-3)\div 4]\}\div\{\{1-3[(4+1)\div 2]-3\}\div 5\}$ es:

a) 9 **b) -60/19** **c) 45/19** **d) – 45/19**

12) En una empresa agroexportadora, reparten los pedidos hacia tres diferentes destinos cada 5, 6 y 8 minutos. ¿A cada cuántos minutos ocurre un envió simultaneo a los tres destinos?

a) 120 **b) 200** **c) 340** **d) Ninguna es correcta**

13) Un estudiante del curso propedéutico utiliza 3/8 del día para actividades de módulo y clases; 1/6 para recibir tutoría y alimentarse y 8 horas para dormir. El número de horas que le queda para practicar algún deporte u otra actividad es:

a) 2 **b) 4** **c) 3** **d) Ninguna es correcta**

14) Tres trozas (troncos) de 12, 18 y 24 metros de longitud respectivamente, deben cortarse en trozas iguales y de la mayor longitud posible para no desperdiciar madera. El número total de trozas que se obtienen al final es:

a) 6 **b) 4** **c) 8** **d) 9**

15) Una persona compra un cerdo de 250 libras en Q2,000.00 utilizando 2/5 partes del total del dinero que llevaba. El total de dinero que llevaba es:

a) Q10000.00 **b) Q15000.00** **c) 5000.00** **d) Ninguna es correcta**

La siguiente fracción compleja le servirá para responder las preguntas 16, 17 y 18.

De la fracción compleja $$2+\cfrac{\cfrac{\cfrac{1}{6}+\cfrac{1}{4}}{\cfrac{3}{4}}\times 3-1}{1+\cfrac{\cfrac{8}{3}-\cfrac{5}{2}}{1-\cfrac{3}{5}\times\cfrac{5}{6}}+2}$$

16) El resultado parcial de operar $\cfrac{\cfrac{1}{6}+\cfrac{1}{4}}{\cfrac{3}{4}}\times 3-1$ es:

a) 2/3 **b) 10/9** **c) 15/6** **d) 53/6**

17) El resultado parcial de operar $\cfrac{1+\cfrac{8}{3}-\cfrac{5}{2}}{1-\cfrac{3}{5}\times\cfrac{5}{6}}+2$ es:

a) 7/3 **b) 7/6** **c) 13/3** **d) 17/30**

18) El resultado de **toda la operación** es:

a) 24/13 **b) 28/13** **c) 24/5** **d) Ninguna es correcta**

19) Si un queso pesa 1/2 de libra, entonces ¿Cuál es el peso en libras de un queso y medio?

a) 3/12 **b) 3/2** **c) 1/2** **d) 3/4**

20) Determine el MCD de 15, 20 y 30:

a) 5 **b) 60** **c) 12** **d) Ninguna es correcta**

BIBLIOGRAFÍA

1. Ardón López, CE. 2008. Aritmética y algebra para estudiantes de agronomía y dasonomía: Guía de estudio. Guatemala, ENCA. 276 p.
2. Duarte Beza, S ; Rodríguez, JE. 1996. Matemáticas 1. Guatemala, Santillana. 144 p.
3. Joya Vega, A ; Chizner Ramos, JA. 2010. Hipertexto matemáticas 7. Colombia. Santillana. 256 p.

ENLACES A VÍDEOS QUE SE PUEDEN CONSULTAR

Clasificación de los números
https://www.youtube.com/watch?v=rtNC7g1h_JA

Propiedades de la suma y la multiplicación
https://www.youtube.com/watch?v=18vc-DZiRSU

Jerarquía operativa
https://www.youtube.com/watch?v=FIjylOufxyU
https://www.youtube.com/watch?v=FDJ7nu8f6Js

Factorización números naturales en factores primos
https://www.youtube.com/watch?v=NPaBFe6QBDQ
https://www.youtube.com/watch?v=sHe8iCJaObw

MCM
https://www.youtube.com/watch?v=txLlA_fyL5g
https://www.youtube.com/watch?v=XmRg6UBOBiA
https://www.youtube.com/watch?v=L9PNc2CBSxc

MCD
https://www.youtube.com/watch?v=UbJEo0Sc3XY
https://www.youtube.com/watch?v=SErd-du3RMc
https://www.youtube.com/watch?v=0N_-gYpGJiE

Operaciones con fracciones

https://www.youtube.com/watch?v=3HNyVbBNGQQ
https://www.youtube.com/watch?v=antZqj9ePys
https://www.youtube.com/watch?v=LVHo5xvsvO0
https://www.youtube.com/watch?v=efz0Efj5Big
https://www.youtube.com/watch?v=FRPijN0ie3U
https://www.youtube.com/watch?v=jvNr-n3KZ5A
https://www.youtube.com/watch?v=HKz0OB5imBM
https://www.youtube.com/watch?v=RNtvQitNbLk
https://www.youtube.com/watch?v=LgMptyzudXU
https://www.youtube.com/watch?v=KDDcZCvgx5k